

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой  
природопользования  
*Леонид Акимов* Акимов Л.М.  
подпись, расшифровка подписи  
26.05.2025 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.В.15 Математическое моделирование в экологии**

---

- 1. Шифр и наименование направления подготовки:** 05.03.06 - Экология и природопользование
- 2. Профиль подготовки:** Геоэкология и природопользование
- 3. Квалификация выпускника:** бакалавр
- 4. Форма обучения:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** кафедра природопользования
- 6. Составитель программы:** Парта Анна Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, факультет географии, геоэкологии и туризма; anna\_razinkova@mail.ru
- 7. Рекомендована:** Протокол о рекомендации: НМС ф-та географии, геоэкологии и туризма от 19.05.2025 г. №8.
- 8. Учебный год:** 2028 / 2029

**Семестр: 7**

## **9. Цели и задачи учебной дисциплины:**

*Цель дисциплины:*

- формирование общепрофессиональных компетенций студентов в области использования математических методов в экологии.

*Задачи учебной дисциплины:*

- изучение основных принципов построения математических моделей в экологии;

- выработка понимания закономерностей функционирования сложных систем, связанных со скоростями поступления, перераспределения и расходования ресурсов;

- обучение выделению основных блоков моделей сложных систем и связи между этими блоками;

- получение опыта деятельности в области анализа устойчивости стационарных состояний экосистем;

- обучение организации сбора и анализа данных для верификации математических моделей;

- развитие у студентов аналитического мышления и общей математической культуры;

- выработка у студентов навыков применения современных информационных систем для решения различных профессиональных задач;

- формирование навыков самостоятельной работы со специальной литературой.

## **10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:**

Дисциплина относится к вариативной части учебного рабочего плана по направлению бакалавриата 05.03.06 - Экология и природопользование, формируемой участниками образовательных отношений. Дисциплина предназначена для ознакомления студентов с наиболее распространенными математическими методами решения экологических задач и с наиболее применяемыми математическими моделями.

Входными знаниями являются знания основ физики, географии, биологии, гидрологии и математической статистики. Для освоения дисциплины «Математическое моделирование в экологии» студенты используют знания, умения, навыки, сформированные на предыдущих курсах и в общеобразовательной школе. Изучение дисциплины «Математическое моделирование в экологии» является необходимой основой для последующего изучения тех дисциплин, которые рассматривают применение методов математики и средств информационных технологий в профессиональной деятельности.

## **11. Планируемые результаты обучения по дисциплине (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:**

Код	Название компетенции	Код	Индикатор	Планируемые результаты обучения
ПК-3	Способен проводить инженерно-экологические изыскания, оценку воз-	ПК-3.6	Проводит комплекс работ по топографо-геодезическому и картографическому обеспечению инженерно-	<b>Знать:</b> теоретические основы математической обработки экологических данных; различные способы и подходы к статистической и математической обработке эколо-

	действия на окружающую среду и экологическую экспертизу проектной деятельности на основе использования современных лабораторно-инструментальных эколого-геохимических, картографо-геодезических и дистанционных методов контроля природных ресурсов		экологических изысканий и экологической экспертизы с использованием современных информационных технологий и методов математического моделирования	гических данных. <b>Уметь:</b> применять математические и статистические методы при анализе экологических процессов и явлений; оценивать и прогнозировать развитие экологических процессов и явлений на основе результатов математического и статистического анализа полевой и лабораторной экологической информации. <b>Владеть:</b> методами математической и статистической обработки, анализа и синтеза полевой и лабораторной экологической информации; основными методами анализа многомерных данных, полученных при лабораторных и полевых экологических исследованиях для системного изучения экосистем.
--	---	--	---	--

## 12. Объем дисциплины в зачетных единицах / час. — 3 / 108

Форма промежуточной аттестации – зачет с оценкой, курсовая работа

## 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)	
	Всего	По семестрам
		5 семестр
Аудиторные занятия	50	50
в том числе: лекции	16	16
практические	—	—
лабораторные	34	34
Самостоятельная работа	58	58
Форма промежуточной аттестации - зачет с оценкой, курсовая работа		
Итого:	108	108

### 13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-

			курса, ЭУМК*
1	Планирование природоохранной деятельности на основе применения моделей и методов линейного программирования	Задачи об оптимальном использовании ресурсов. Каноническая задача линейного программирования. Сведение общей задачи линейного программирования к канонической. Основные теоремы линейного программирования. Геометрический метод решения задач линейного программирования. Симплекс метод. Двойственные задачи	
2	Транспортная задача линейного программирования с экологическим критерием	Математическая модель транспортной задачи. Нахождение опорного плана. Определение оптимального плана транспортной задачи	
3	Применение теории графов в решении экологических проблем	Введение в теорию графов. Оптимизационные задачи на графах (сильная связность, минимальный путь в ориентированном графе). Задача комивояжера	
4	Работа с математическими моделями с использованием прикладных программ общего назначения	Основы использования прикладных программ общего назначения: текстовых редакторов, электронных таблиц, систем управления базами данных (СУБД) для решения задач математического моделирования в экологии	

### 13.2 Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Планирование природоохранной деятельности на основе применения моделей и методов линейного программирования	6	—	12	18	36
2	Транспортная задача линейного программирования с экологическим критерием	4	—	8	12	24
3	Применение теории графов в решении экологических проблем	4	—	8	18	30
4	Работа с математическими моделями с ис-	2	—	6	10	18

	пользованием прикладных программ общего назначения					
	Итого:	16		34	58	108

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Наиболее сложными являются разделы о применении теории графов в решении экологических проблем. Для их усвоения необходимо прочитать: Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах / Пантелеев А.В., Летова Т.А. – М.: Высш. шк., 2002, с. 326-328.

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 / Данко П.Е., Попов А.Г. Кожевникова Т.Я., Данко С.П. – М.: ОНИКС, Мир и образование, 2007
2	Мятлев В.Д. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели: учебник / Мятлев В.Д., Панченко Л.А., Ризниченко Г.Ю., Терехин А.Т. — Москва: Академия, 2009. — 319 с.
3	Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах / Пантелеев А.В., Летова Т.А. – М.: Высш. шк., 2002. - 328 с.
4	Симонович С.В. Информатика базовый курс / С.В Симонович. – СПб.: Изд-во Питер, 2009. – 639 с.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
5	Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры: Учебник для студ. втузов / Самарский А.А., Михайлов А.П. – М.: Физматлит, 2001.– 479 с.
6	Угринович Н.Д. Информатика и информационные технологии. / Н.Д. Угринович. – М.: ВИНОМ. Лабораторные знания, 2012. – 512 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет):

№ п/п	Ресурс
1	Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online" ( <a href="http://biblioclub.ru/">http://biblioclub.ru/</a> )
2	Электронно-библиотечная система "Лань" ( <a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a> )
3	Национальный цифровой ресурс "РУКОНТ" <a href="http://rucont.ru">http://rucont.ru</a>

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы**

№ п/п	Источник
1	Мятлев В.Д. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели: учебник / Мятлев В.Д., Панченко Л.А., Ризниченко Г.Ю., Терехин А.Т. — Москва: Академия, 2009. — 319 с.
2	Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах / Пантелеев А.В., Летова Т.А. — М.: Высш. шк., 2002. - 328 с.

**17. Образовательные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):**

Программа курса реализуется с применением дистанционных технологий на платформе «Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». Режим доступа: <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=2973>.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Для лекционных занятий – аудитория (учебный корпус №5 ВГУ, ауд. 303), оснащенная специализированной мебелью, мультимедийной аппаратурой (мультимедиа-проектор, компьютер, стационарный экран); для лабораторных занятий – аудитория (учебный корпус № 5 ВГУ, ауд. 311), оснащенная специализированной мебелью, вычислительной техникой (укомплектованная персональными компьютерами с лицензионным программным обеспечением: 13 персональных компьютеров с мониторами (HP Elite Desk 800 G1, монитор 21.5" LED LCD Samsung /лицензионное ПО: Microsoft Office 2013, STADIA), телевизор настенный, сканер, принтер HP.

**19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Компетенция	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
1	Планирование природоохранной деятельности на основе применения моделей и методов линейного программирования	ПК-3	ПК-3.6	Контрольная работа № 1
2	Транспортная задача линейного программирования с экологическим критерием	ПК-3	ПК-3.6	Контрольная работа № 2
3	Применение тео-	ПК-3	ПК-3.6	Контрольная работа № 3

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Компетенция	Индикатор достижения компетенции	Оценочные средства
	рии графов в решении экологических проблем			
4	Работа с математическими моделями с использованием прикладных программ общего назначения	ПК-3	ПК-3.6	Устный опрос, презентационный материал
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет с оценкой, курсовая рабо- та		<p><b>Перечень вопросов к зачету:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Задачи об оптимальном использовании ресурсов.</li> <li>2. Каноническая задача линейного программирования.</li> <li>3. Сведение общей задачи линейного программирования к канонической.</li> <li>4. Основные теоремы линейного программирования.</li> <li>5. Геометрический метод решения задач линейного программирования.</li> <li>6. Симплекс метод.</li> <li>7. Двойственные задачи.</li> <li>8. Математическая модель транспортной задачи.</li> <li>9. Нахождение опорного плана.</li> <li>10. Определение оптимального плана транспортной задачи.</li> <li>11. Введение в теорию графов.</li> <li>12. Оптимизационные задачи на графах (сильная связность, минимальный путь в ориентированном графе).</li> <li>13. Задача комивояжера.</li> </ol> <p><b>Типовые практические задания:</b> вычислительные задачи по линейной алгебре, аналитической геометрии и математическому анализу</p>		

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: Практикоориентированные задания / домашние задания. Контрольная работа.

### 20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

**5 семестр**

- контрольно-измерительных материалов, включающих 2 теоретические вопросы и расчетно-вычислительную задачу.

**Теоретические вопросы:****5 семестр**

1. Задачи об оптимальном использовании ресурсов.
2. Каноническая задача линейного программирования.
3. Сведение общей задачи линейного программирования к канонической.
4. Основные теоремы линейного программирования.
5. Геометрический метод решения задач линейного программирования.
6. Симплекс метод.
7. Двойственные задачи.
8. Математическая модель транспортной задачи.
9. Нахождение опорного плана.
10. Определение оптимального плана транспортной задачи.
11. Введение в теорию графов.
12. Оптимизационные задачи на графах (сильная связность, минимальный путь в ориентированном графе).
13. Задача коммивояжера.

**Тестовые задания**

1. Общее уравнение прямой  $2x + 2y - 8 = 0$ , записанное в виде «в отрезках», имеет вид:
  1.  $x / 4 + y / 4 = 1$  (**Правильный ответ**);
  2.  $x / 4 + y / 4 = -1$ ;
  3.  $x / 4 + y / 4 = 8$ ;
  4.  $x / 4 + y / 4 = -8$ .
2. Общее уравнение прямой, содержащей точки А (3, 1) и В(-2, -2) имеет вид:
  1.  $-x - 5y + 8 = 0$ ;
  2.  $3x - 5y - 4 = 0$  (**Правильный ответ**);
  3.  $-2x + 2y + 8 = 0$ ;
  4.  $x - 4y + 8 = 0$ .
3. В каком виде может быть записана целевая функция?
  1.  $x - 4y + 8z = 0$ ;
  2.  $x - 4y + 8z = \text{norm}$ ;
  3.  $x - 4y + 8z \rightarrow \min (\max)$  (**Правильный ответ**);
  4.  $x - 4y + 8z \rightarrow \text{non}$ .
4. Уравнение прямой «в отрезках»  $x / 4 + y / 4 = 1$ , в общем виде может иметь запись:
  1.  $-2x + 2y + 8 = 0$ ;
  2.  $2x + 2y - 8 = 0$  (**Правильный ответ**);
  3.  $x - 4y + 8 = 0$ ;
  4.  $3x - 5y - 4 = 0$ .
5. Какая точка удовлетворяет неравенству  $2x + 2y - 8 = 0$ ?
  1. (10; 0);
  2. (0; 0) (**Правильный ответ**);

3. (0; 10).

6. Матричное уравнение  $A X = B$  с невырожденной квадратной матрицей  $A$  имеет решение:

1.  $X = B A$ ;
2.  $X = A B$ ;
3.  $X = B A - 1$ ;
- 4.  $X = A - 1 B$  (Правильный ответ).**

### Задачи:

1. Определить параметр  $k$  прямой  $2x + 5y - 10 = 0$ . Ответ записать в виде десятичной дроби.

#### Решение:

Разрешив уравнение относительно  $y$ , получим:

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{10}{5} \quad \text{или} \quad y = -\frac{2}{5}x + 2.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением  $y = kx + b$ , находим  $k = -\frac{2}{5} = -0,4$

**Ответ: - 0,4.**

2. Вычислить определитель третьего порядка  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ .

#### Решение:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 5 = -5 + 12 - 8 + 3 - 20 = -10$$

**Ответ: - 10.**

3. Оптимальное решение задачи линейного программирования (ЗЛП), стандартная и каноническая ЗЛП.

### Ответ:

**Оптимальным решением (или оптимальным планом) ЗЛП называется решение  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  системы ограничений, удовлетворяющее условию неотрицательности, при котором линейная целевая функция принимает оптимальное (максимальное или минимальное) значение.**

**ЗЛП называется стандартной, если все переменные  $x_j \geq 0$  и система ограничений состоит из одних неравенств.**

**ЗЛП называется канонической, если все переменные  $x_j \geq 0$  и система ограничений состоит из одних уравнений.**

4. Выпуклая линейная комбинация точек, выпуклое множество.

### Ответ:

**Точка  $X$  называется выпуклой линейной комбинацией точек  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , если существуют такие числа  $\alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ , удовлетворяющие условию  $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ , что**

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n.$$

**В случае  $n = 2$  это определение отрезка.**

**Множество точек является выпуклым, если оно вместе с любыми своими двумя точками содержит их выпуклую линейную комбинацию.**

**Геометрически это означает, что выпуклое множество вместе со своими двумя любыми точками содержит и отрезок, соединяющий их.**

5. Внутренняя, граничная, угловая точки выпуклого множества.

**Ответ:**

**Внутренняя точка, в некоторой окрестности которой содержатся только точки данного множества.**

**Граничная, если в любой ее окрестности содержатся как точки принадлежащие данному множеству, так и не принадлежащие ему.**

**Угловая, если она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком принадлежащего данному множеству.**

6. Замкнутое множество. Ограниченнное множество.

**Ответ:**

**Множество точек называется замкнутым, если включает все свои граничные точки.**

**Множество точек называется ограниченным, если существует шар радиуса конечной длины с центром в любой точке множества, который полностью содержит в себе данное множество.**

**Критерии оценивания ответа:**

- оценка «отлично» выставляется студенту, если он знает основной материал дисциплины, умеет самостоятельно использовать его для решения прикладных задач;

- оценка «хорошо» предполагает знание большей части материала дисциплины и методов его использования, умение решать типовые задачи;

- оценка «удовлетворительно» показывает наличие представления об основных положениях материала дисциплины, умение использовать его для решения простейших задач;

- оценка «неудовлетворительно» выявляет отсутствие практических навыков при слабом представлении о содержании дисциплины.